# فرآیندهای تصادفی
# زمزگ-رده‌بندی حالت‌ها و توزیع حدی

محسن هوشمند
دانشکده تکنولوژی اطلاعات و علم رایانه
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

# دسترس‌پذیری

حالت $j$ از حالت $i$ دسترس‌پذیر است اگر $P_{ij}^n > 0$ به ازای $n \geq 0$

- به عبارت دیگر، به معنای فرایند با شروع از $i$ امکان رفتن به حالت $j$

این سخن درست است زیرا در صورت دسترس‌پذیرنبودن $j$ از $i$

$$P\{j \text{ بودن در } | i \text{ شروع از}\} = P\{\cup_{n=0}^{\infty}\{X_n = j\} \,|X_0 = i\}$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} P = \{X_n = j|X_0 = i\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^n$$

$$= 0$$

# دسترس‌پذیری

حالت $j$ از حالت $i$ دسترس‌پذیر است اگر $P_{ij}^{n} > 0$ به ازای چند $n \geq 0$

- به عبارت دیگر، به معنای فرایند با شروع از $i$ امکان رفتن به حالت $j$

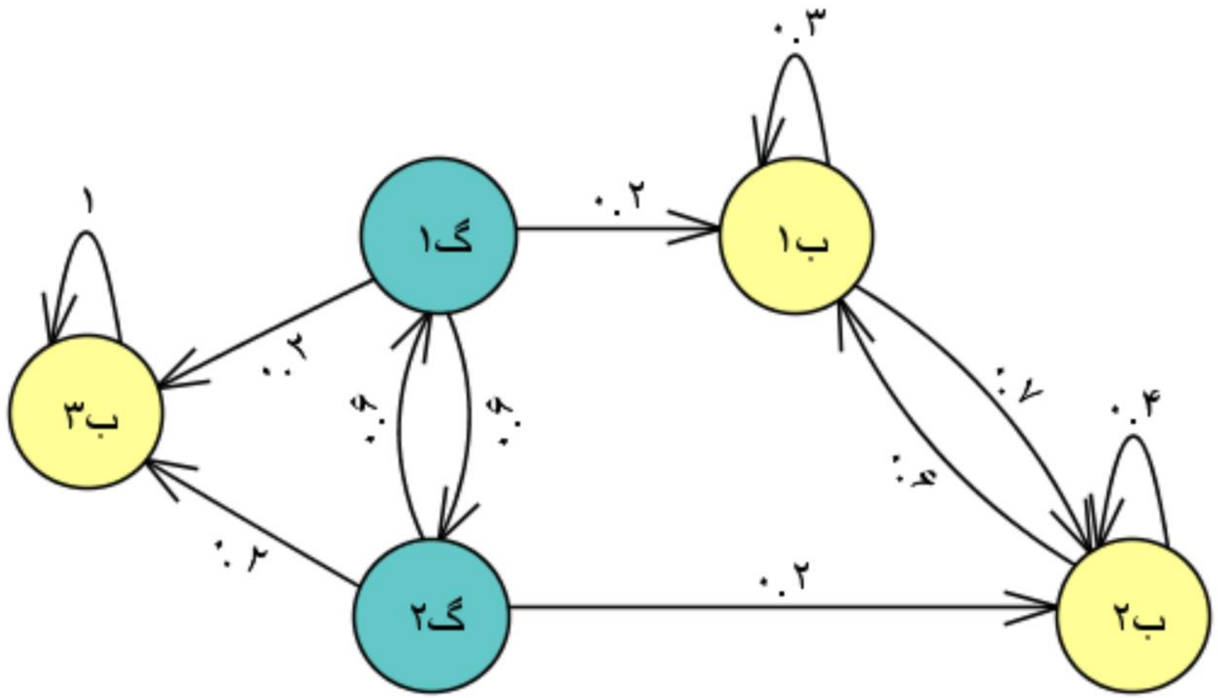
$$P_{ii}^{n} = 1$$

- حالت **i** دسترس‌پذیر از خودش

تمامی حالت‌ها دسترس‌پذیر از گ۱ یا گ۲

صرفا ب۱ و ب۲ دسترس‌پذیر از ب۱ و ب۲

ب۳ تنها دسترس‌پذیر از خودش



# ارتباط

حالت $i$ و $j$ ارتباط دارند $j \leftrightarrow i$ اگر

- $j$ دسترس‌پذیر از $i$
- $i$ دسترس‌پذیر $j$

- هر حالتی با خود در ارتباط است

$$P_{ii}^{0} = P\{X_0 = i | X_0 = i\} = 1$$

# ویژگی‌های ارتباط

بازتابی

- هر حالت $i$ با خود در ارتباط است $i \leftrightarrow i$

تقارن

- اگر $j \leftrightarrow i$، آن‌گاه $i \leftrightarrow j$

ترایایی

- اگر $j \leftrightarrow i$ و $k \leftrightarrow j$، آن‌گاه $i \leftrightarrow k$

خواص بازتابی و تقارن نتیجه مستقیم از تعریف ارتباط

جهت اثبات ترایایی

$$i \leftrightarrow j: P_{ij}^{n} > 0, j \leftrightarrow k: P_{jk}^{m} > 0 \Longrightarrow P_{ik}^{m+n} = \sum_{r=0}^{\infty} P_{ir}^{n} P_{rk}^{m}, \geq P_{ij}^{n} P_{jk}^{m} > 0$$

# طبقه (رده) و کاهش‌ناپذیری

دو حالت در ارتباط در یک رده قرار دارند.

طبق سه ویژگی ارتباط

- نشان‌گر دو طبقه در واقع یا یکی هستند یا جدا

به دیگر سخن مفهوم ارتباط تقسیم کنندهٔ فضای حالت به دسته‌های جدا از یکدیگر

کاهش‌ناپذیری

- اگر زنجیره مارکوف صرفا دارای یک طبقه
- به دیگر سخن، تمامی حالت‌ها دو به دو در ارتباط با یکدیگر

# مثال

کاهش‌ناپذیر؟

- $0 \rightarrow ۱ \rightarrow ۲ \rightarrow ۱ \rightarrow 0$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & 0 \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۲} \\ 0 & \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} \end{bmatrix}$$

# مثال

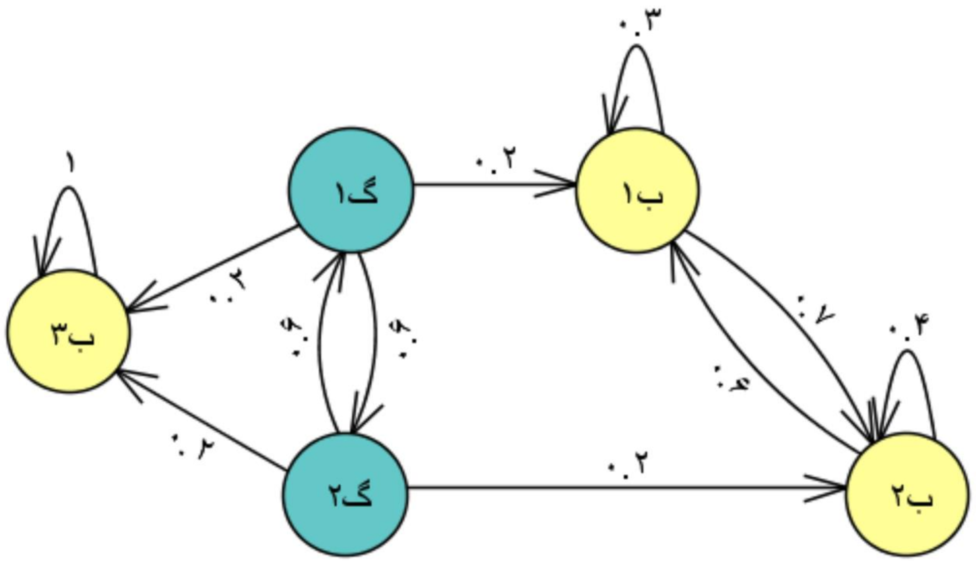
$$P = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & 0 & 0 \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & 0 & 0 \\ \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۴} \\ 0 & 0 & 0 & ۱ \end{bmatrix}$$

زنجیره مارکوف با چهار حالت 0,۱,۲,۳ و ماتریس احتمال انتقال

رده‌ها؟

- سه رده
  - {0,۱}
  - {۲}
  - {۳}
- توضیح
  - 0 یا ۱ از ۲ دسترس‌پذیر ولی برعکس برقرار نیست
  - حالت۳ حالت جذب‌کننده

# حالت‌های گذرا و بازگشتی




حالت‌ها در زنجیره مارکوف

- یا بازگشتی یا گذرا

حالت گذرا

- ممکن است در بدو ملاقات شود
- ولی نهایتا متوقف شدن ملاقات‌ها
- اگر i گذرا، تقریبا با اطمینان $X_n \neq i$ برای n-های بزرگ

حالت بازگشتی

- ملاقات همیشگی
- برای مقدار $n \geq \mathrm{m}$ تقریبا با اطمینان $X_n = i$

# حالت‌های گذرا و بازگشتی

$f_i$ احتمال با شروع از $i$ زنجیره به $i$ برگردد

$i$ حالت بازگشتی

- $f_i = ۱$
- بازگشت دوباره و دوبارهٔ فرایند به $i$
- «معمولا» بی‌نهایت بار

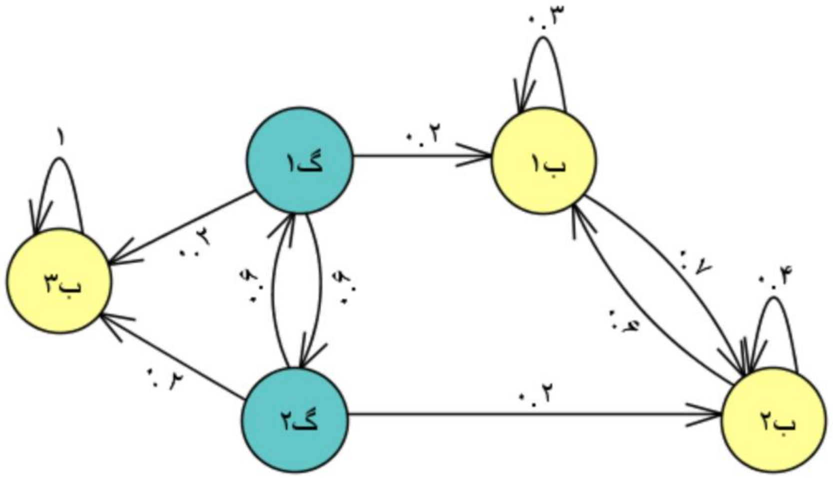
$i$ حالت گذرا

- $f_i < ۱$
- عدم برگشت به $i$ با احتمال بزرگتر از $0 < ۱ - f_i$

# حالت‌های گذرا و بازگشتی

$f_i$ احتمال با شروع از $i$ زنجیره به $i$ برگردد

$$f_i = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = i | X_0 = i\right) = P\left(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} X_n = i | X_m = i\right)$$




# مثال حالت بازگشتی

ب۳ بازگشتی زیرا حالت مانا (جذب‌کننده) است $P(X_1 = b۳|X_0 = b۳) = ۱$

ب۱ بازگشتی زیرا

$$P(X_۱ = b۱|X_0 = b۱) = ۰.۳$$

$$P(X_۲ = b۱, X_۱ \neq b۱|X_0 = b۱) = ۰.۷ \times ۰.۶$$

$$P(X_۳ = b۱, X_۲ \neq b۱, X_۱ \neq b۱|X_0 = b۱) = ۰.۷ \times ۰.۴ \times ۰.۶$$

$$\vdots$$

$$P(X_n = b۱, X_{n-۱} \neq b۱, \ldots, X_۱ \neq b۱|X_0 = b۱) = ۰.۷ \times (۰.۴)^{n-۲} \times ۰.۶$$

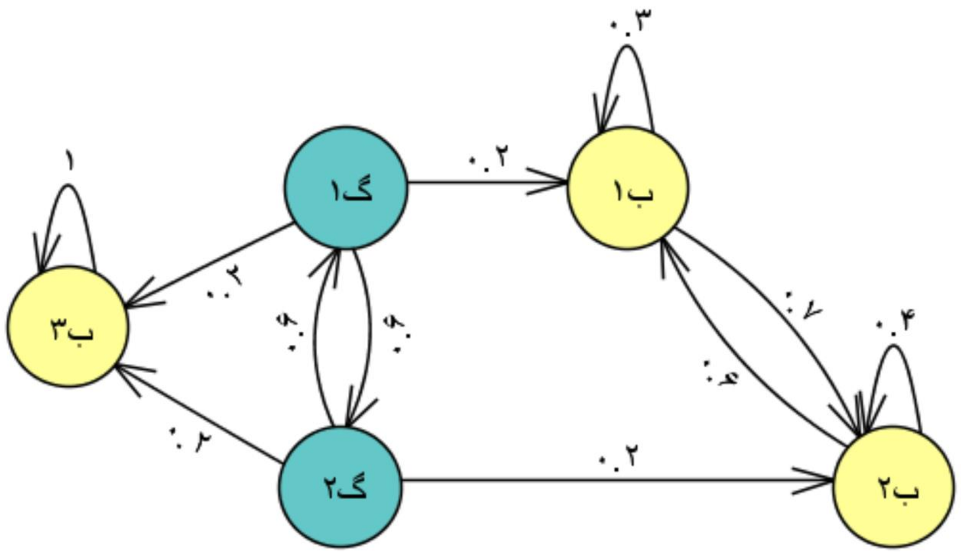
سخن کوتاه

$$f_i = \sum_{n=۱}^{\infty} P(X_n = b۱, X_{n-۱} \neq b۱, \ldots, X_۱ \neq b۱|X_0 = b۱) = ۰.۳ + ۰.۷\left(\sum_{n=۲}^{\infty}(۰.۴)^{n-۲}\right)۰.۶$$

$$۰.۳ + ۰.۷\left(\frac{۱}{۱ - ۰.۴}\right)۰.۶ = ۱$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{۱}{۱ - x}$$

# مثال حالت گذرا




گ۱ و گ۲ گذرا

احتمال بازگشت به گ۱

$$f_{۱گ} = (۰.۶)^۲$$

- احتمال بازگشت اگر به گ۲ برود
- صرفا بازگشت از گ۲ به گ۱

ایضا گ۲

$$f_{۲گ} = (۰.۶)^۲$$

# توزیع هندسی

n آزمایش

- با دو حالت شکست و پیروزی در هر آزمایش
- احتمال پیروزی p احتمال شکست q
  - $p + q = ۱$

احتمال پیروزی در آزمایش n-اُم (شکست $n - ۱$ مرحلهٔ قبلی)

- توزیعی گسسته

$$g(n; p) = (۱ - p)^{n-۱} p$$

- میانگین

$$\mu = \frac{۱}{p}$$

احتمال پیروزی در آزمایش $n + ۱$-اُم (شکست $n$ مرحلهٔ قبلی)

- توزیعی گسسته

$$g(n; p) = (۱ - p)^{n} p$$

- میانگین

$$\mu = \frac{۱ - p}{p}$$

# امید تعداد ملاقات حالت‌ها

$$\mathbb{I}_n = \begin{cases} ۱: & X_n = i | X_0 = i \\ 0: & X_n \neq i | X_0 = i \end{cases}$$

$N_i$ تعداد ملاقات‌های حالت $i$ با داشتن $X_0 = i$

$$N_i = \sum_{n=۱}^{\infty} \mathbb{I}_n \{X_n = i | X_0 = i\}$$

اگر $X_n = i$

- احتمال n بار ملاقات حالت $i$
- آخرین ملاقات $i$ با احتمال $۱ - f_i$
- N ملاقات ×بدون ملاقات بیشتر
  - $P(N_i = n) = {f_i}^n(۱ - f_i)$

تعداد موردانتظار ملاقات

$$E[N_i] + ۱ = \frac{۱}{۱ - f_i} \Rightarrow E[N_i] = \frac{f_i}{۱ - f_i}$$

حالت **بازگشتی** $N_i = \infty$ و در نتیجه $E[N_i] = \infty$

# نوع دیگر ویژگی بازگشتی/گذرا

روش دیگر نوشتن امید

$$E[N_i] = \sum_{n=۱}^{\infty} E[\mathbb{I}\{X_n = i | X_0 = i\}] = \sum_{n=۱}^{\infty} P_{ii}^n$$

- منجر به اثبات قضیهٔ زیر

قضیه

- حالت **i** گذرا
  - اگر و فقط اگر $\sum_{n=۱}^{\infty} P_{ii}^n < \infty$
- حالت **i** بازگشتی
  - اگر و فقط اگر $\sum_{n=۱}^{\infty} P_{ii}^n = \infty$

- تعداد برگشت‌های بعدی به حالت‌های گذرا متناهی است
- اگر تعداد حالت‌ها متناهی، آن‌گاه بعضی حالت‌ها بازگشتی

# خواص رده‌ای

اگر $i$ بازگشتی و $i \leftrightarrow j$، آن‌گاه $j$ نیز بازگشتی است

- اثبات
- اگر $j$ بازگشتی باشد، آنگاه بر اساس قضیهٔ قبلی $i$ نیز بازگشتی خواهد بود. یا:

- $i \leftrightarrow j: \exists k, m: P_{ij}^{k} > 0, P_{ji}^{m} > 0 \Longrightarrow \forall n:\ P_{jj}^{m+n+k} \geq P_{ji}^{m} P_{ii}^{n} P_{ij}^{k} > 0$
- $\sum_{n=۱}^{\infty} P_{jj}^{m+n+k} \geq P_{ji}^{m} P_{ii}^{n} \sum_{n=۱}^{\infty} P_{ii}^{n} = \infty$

بازگشتی بودن بین اعضای یک ردهٔ ارتباطی ویژگی مشترک است

- خاصیت رده‌ای

به طریق اولی، گذرا نیز خاصیت رده‌ای

حالت‌های زنجیره مارکوف به دو ردهٔ گذرا و بازگشتی تقسیم شده‌اند

# زنجیره مارکوف کاهش‌ناپذیر

## کاهش‌ناپذیری

- اگر زنجیره دارای یک رده باشد
- تمامی حالت‌ها با یکدیگر ارتباط دارند
- اگر زم کاهش‌ناپذیر و دارای تعداد متناهی از حالت‌ها
  - آن‌گاه تک رده بازگشتی است
- اگر زم دارای نامتناهی حالت باشد
  - امکان گذرا بودن کلاس

## کاهش‌پذیر

- وقتی چندین رده دارد
  - رده‌های حالات گذرا
  - رده‌های حالات بازگشتی

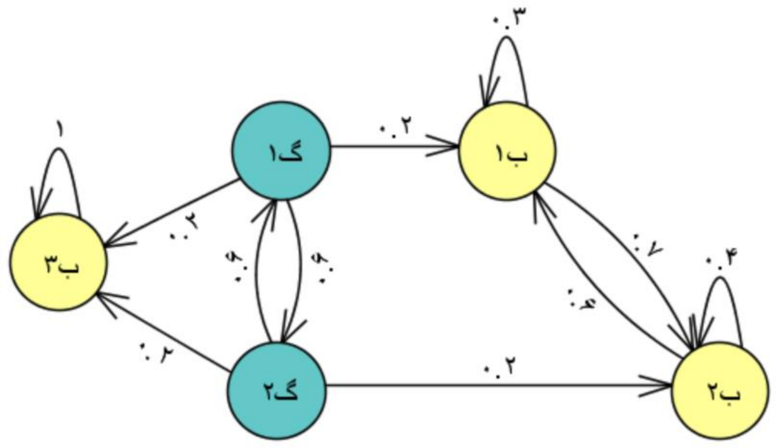
# زنجیره مارکوف کاهش‌ناپذیر

در صورت آغاز به کار در رده بازگشتی
- باقی ماندن در همان رده

در صورت آغاز به کار در ردهٔ گذرا، آن‌گاه امکان
- ماندن در همان رده
- رفتن به رده گذرای دیگر
- رفتن به ردهٔ بازگشتی

برای زمان‌های طولانی
- زنجیره محدود به تک رده
  - امکان تقسیم‌بندی به مولفه‌های کاهش‌ناپذیر

# مثال رده‌های ارتباطی




سه رده

رده حالت‌های گذار: گ۱ و گ۲

رده حالت‌های بازگشتی: ب۱ و ب۲

رده حالت بازگشتی: ب۳

برای **n**-های بزرگ

- کافی بودن مطالعه مولفه‌های کاهش‌ناپذیر ب۱ و ب۲

# مثال

زنجیره مارکوف با چهار حالت ۰,۱,۲,۳ و ماتریس احتمال انتقال

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حالت‌های گذرا و بازگشتی کدامند؟

$$0 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 0$$

- پس همه با هم در ارتباط
- چون زنجیره متناهی پس تمامی حالت‌ها لزوما بازگشتی

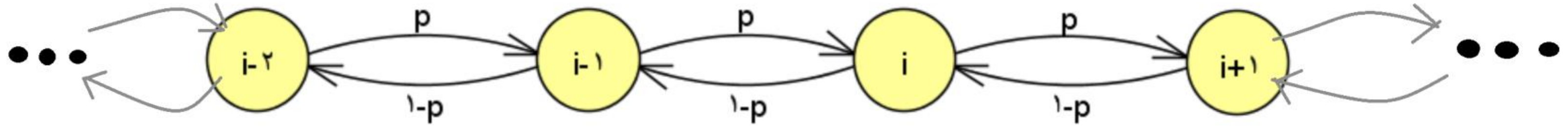
# مثال

زنجیره مارکوف با پنج حالت $0,۱,۲,۳,۴$ و ماتریس احتمال انتقال

$$P = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & 0 \\ \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۴} & 0 & 0 & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$

حالت بازگشت؟

- دارای رده‌های
  - {0,۱}
  - بازگشتی
  - {۲,۳}
  - بازگشتی
  - {۴}
  - گذرا




# مثال- افتان و خیزان می‌روی

قدم به راست با احتمال $0 < p < ۱$

- قدم به چپ با احتمال $۱ - p$
- راه مستقیم نمی‌تواند

- ارتباط حالت‌ها؟
  - همگی در ارتباط با یکدیگر
- نتیجه
  - زنجیره مارکوفی کاهش‌ناپذیر
  - به دیگر سخن، صرفا یک رده
- نیاز به مشخص کردن اینکه
  - رده گذراست یا بازگشتی
  - پس بررسی حالت 0 جهت
    - معین کردن متناهی یا بی‌نهایت بودن $\sum_{n=۱}^{\infty} P_{ii}^{n}$

حالت‌ها $i = 0, \pm ۱, \pm ۲, \ldots$

- تعداد نامتناهی از حالت‌ها
- احتمال‌های انتقال
  - $P_{i,i+۱} = p = ۱ - P_{i,i-۱}$

# توزیع دوجمله‌ای

امتحان‌های تکراری

احتمال تمام پیروزی‌ها برابر با $\theta$

هر پرتاب (آزمایش) مستقل از دیگر آزمایش‌ها

$X \sim \text{دوجمله‌ای}(x; n, \theta)$

$0 \leq \theta \leq ١$

$$b(x; n, \theta) = \binom{n}{x} \theta^x (١ - \theta)^{n-x}, \qquad x = 0, ١, \ldots, n$$

# مثال- ولگشت

$$P_{00}^{2n-1} = 0, n = 1, 2, \ldots$$

- چرا؟ استفاده از مدل شرطبندی
- به خانه صفر برگشتن اگر و فقط اگر n برد و n باخت
  - برگشت به 0 با $2n$ گام
    - n گام راست و n گام به چپ
  - احتمال برد p
  - احتمال باخت 1-p
- توزیع احتمالی؟
  - دوجمله‌ای

$$P_{00}^{2n} = \binom{2n}{n} p^n q^n = \frac{(2n)!}{n!\,n!} p^n q^n = \frac{(2n)!}{n!\,n!} [p(1-p)]^n, n = 1, 2, \ldots$$

  - استفاده از تقریب استرلینگ

$$n! \cong \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}$$

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n} \sqrt{2\pi}}{n^{2n+1} e^{-2n} 2\pi} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} \Longrightarrow P_{00}^{2n} \sim \frac{[4p(1-p)]^n}{\sqrt{n\pi}}$$

# مثال- ول گشت

$$\binom{۲n}{n} = \frac{(۲n)^{۲n+\frac{۱}{۲}} e^{-۲n}\sqrt{۲\pi}}{n^{۲n+۱} e^{-۲n} ۲\pi} = \frac{۲^{۲n}}{\sqrt{n\pi}} \Longrightarrow P_{00}^{۲n} \sim \frac{[۴p(۱-p)]^n}{\sqrt{n\pi}}$$

$$\sum_{n=۱}^{\infty} P_{00}^{۲n} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{[۴p(۱-p)]^n}{\sqrt{n\pi}}$$

- اگر $p = \frac{۱}{۲}$ آن‌گاه $۴p(۱-p) = ۱$

$$\sum_{n=۱}^{\infty} P_{00}^{۲n} \begin{cases} = \infty, p = \frac{۱}{۲} \\ < \infty, p \neq \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

- $p = \frac{۱}{۲}$ گام تصادفی متقارن
- در بیشتر از یک بعد
  - دوبعد

# مثال- ولگشت دوبعدی

- در بیشتر از یک بعد
  - دوبعد

$$P_{(i,j),(i+۱,j)} = P_{(i,j),(i-۱,j)} = P_{(i,j),(i,j+۱)} = P_{(i,j),(i,j-۱)} = \frac{۱}{۴}$$

  - کاهش‌ناپذیر؟
  - پس همگی بازگشتی در صورتی که $\mathbf{0} = (0,0)$ بازگشتی
  - $P_{\mathbf{00}}^{۲n}$
    - در **2n** قدم برگشت به مبدا در صورتی که به ازای $0 \le i \le n$
      - **i** قدم به چپ، **i** قدم به راست، **n-i** قدم به بالا و **n-i** قدم به پائین
      - هر قدم با احتمال $\frac{۱}{۴}$
      - نوع توزیع؟
      - چندجمله‌ای

$$P_{\mathbf{00}}^{۲n} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(۲n)!}{i!\,i!\,(n-i)!\,(n-i)!} \left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲n} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(۲n)!}{n!\,n!} \frac{n!}{i!\,(n-i)!} \frac{n!}{i!\,(n-i)!} \left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲n}$$

$$= \left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲n} \binom{۲n}{n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} = \left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲n} \binom{۲n}{n} \binom{۲n}{n}$$

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{m}{r} \binom{n}{k-r} = \binom{m+n}{k}$$

# مثال- ولگشت دوبعدی

$$P_{\mathbf{00}}^{۲n} = \left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲n} \binom{۲n}{n}\binom{۲n}{n}$$

$$\binom{۲n}{n} \xRightarrow{\text{استرلینگ}} \binom{۲n}{n} \sim \frac{۴^n}{\sqrt{n\pi}}$$

$$P_{\mathbf{00}}^{۲n} = \frac{۱}{\pi n} \Rightarrow \sum_{n=۱}^{\infty} P_{\mathbf{00}}^{۲n} = \infty$$

- پس تمامی حالت‌ها بازگشتی

# حالت‌های گذرا و بازگشتی

$f_i$ احتمال با شروع از **i** زنجیره به **i** برگردد

$$f_i = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = i | X_0 = i\right) = P\left(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} X_n = i | X_m = i\right)$$

# قضیه

اگر $i$ بازگشتی و $i \leftrightarrow j$ و $f_{ij}$ احتمال اینکه زنجیره مارکوف با شروع از **i** به حالت **j** منتقل شود

$$f_{ij} = P(X_n = j | X_0 = i)$$

آنگاه $f_{ij} = ۱$.

اثبات- $i \leftrightarrow j : \exists n : P_{ij}^n > 0$

$$X_0 = i$$

در اولین فرصت با احتمال $P_{ij}^n > 0$

- در صورتی که وارد نشود محتملا پس از **n** باز به **i** برمی‌گردد؟ حتما به دلیل بازگشتی بودن
  - باز فرصت با احتمال $P_{ij}^n > 0$
  - ادامه تحلیل
  - توزیع هندسی با ضرائب $P_{ij}^n$

$$(۱ - P_{ij}^n)^{k-۱} P_{ij}^n$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{۱}{۱ - x} \Longrightarrow f_{ij} = \sum_{k=۱}^{\infty} \left(۱ - P_{ij}^n\right)^{k-۱} P_{ij}^n = \frac{۱}{۱ - \left(۱ - P_{ij}^n\right)} P_{ij}^n = ۱$$

# امید تعداد انتقال‌های برگشت به حالت

حالت بازگشتی

- برگشت به حالت با احتمال ۱

زمان بازگشت به حالت $j$ با شروع از $j$

$$N_j = \min\{n > 0 : X_n = j | X_0 = j\}$$

$m_j$ امید تعداد انتقال‌هائی که زم با شروع از $j$ به $j$ برگردد (یا امید زمان بازگشت)

$$m_j = E\left[N_j \middle| X_0 = j\right]$$

$$= \sum_{n=۱}^{\infty} nP\left(N_j = n \middle| X_0 = j\right)$$

به دیگر سخن میانگین تعداد قدم‌های لازم برای بازگشت به $j$ با شروع از $j$

# بازگشت مثبت و بازگشت پوچ

فرض حالت بازگشتی

تعریف - «بازگشت مثبت» حالت $i$

- $N_j$ دارای امید ریاضی متناهی

$$m_j = E\left[N_j \middle| X_0 = j\right] = \sum_{n=۱}^{\infty} nP\left(N_j = n \middle| X_0 = j\right) < \infty$$

تعریف - «بازگشت پوچ» حالت $i$

- حالت $i$ بازگشتی اما $N_j$ دارای امید ریاضی نامتناهی

$$m_j = E\left[N_j \middle| X_0 = j\right] = \sum_{n=۱}^{\infty} nP\left(N_j = n \middle| X_0 = j\right) = \infty$$

# قضیه

- $m_j$ امید تعداد انتقال‌هائی که زم با شروع از $j$ به $j$ برگردد
- $\pi_j$ نسبت بلندمدت زمانی که زنجیره در حالت $j$ خواهد بود

قضیه

اگر زنجیره مارکوف کاهش‌ناپذیر و بازگشتی باشد برای هر حالت آغازی

$$\pi_j = \frac{۱}{m_j}$$

اثبات-

- $T_۱$ تعداد انتقال‌هائی که با شروع از $i$ به $j$ می‌رسد
- $T_۲$ تعداد انتقال‌هائی اضافی بعد $T_۱$ که باز به $j$ می‌رسد
- $T_۳$ تعداد انتقال‌هائی اضافی بعد $T_۱ + T_۲$ که باز به $j$ می‌رسد
- $T_n$ تعداد انتقال‌هائی اضافی بین n-1-اُمین و n-اُمین انتقال‌ها به $j$ می‌رسد
- با استفاده از خاصیت مارکوفی $T_۲, T_۳, \ldots$ دارای توزیع یکسان و مستقل با میانگین $m_j$ هستند

# قضیه

چون $n$-اُمین انتقال به $j$ در زمانی $T_۱ + T_n$

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sum_{i=۱}^{n} T_i} = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} T_i} = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{\frac{T_۱}{n} + \frac{T_۲ + \cdots + T_n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{m_j}$$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{T_۱}{n} = 0$
- قانون قوی اعداد بزرگ $\lim_{n\to\infty} \frac{T_۲+\cdots+T_n}{n} = \frac{T_۲+\cdots+T_n}{n-۱}\frac{n-۱}{n} = m_j$

نتایج چون $m_j < \infty$ متناظر با $\frac{۱}{m_j} > 0$

- $j$ بازگشتی مثبت اگر و فقط اگر $\pi_j > 0$
- استفاده در اثبات «بازگشتی مثبت» به مثابهٔ خاصیتی رده‌ای

# قضیه

اگر $i$ بازگشتی مثبت و $j \leftrightarrow i$، آن‌گاه $j$ بازگشتی مثبت است.

اثبات-

- احتمال $P_{ij}^{n} > 0$
- $\pi_i$ نسبت بلندمدت زمان ماندن زنجیره در حالت $i$
- $\pi_i P_{ij}^{n}$ نسبت بلندمدت زمان ماندن زنجیره در حالت $i$ و سپس پس از n انتقال به $j$ منتقل شود
  - به دیگر سخن، نسبت بلندمدت زمان بودن زنجیره در حالت $j$ و n انتقال پیش در حالت $i$ بود!؟≥نسبت بلندمدت زمان ماندن زنجیره در حالت $j$

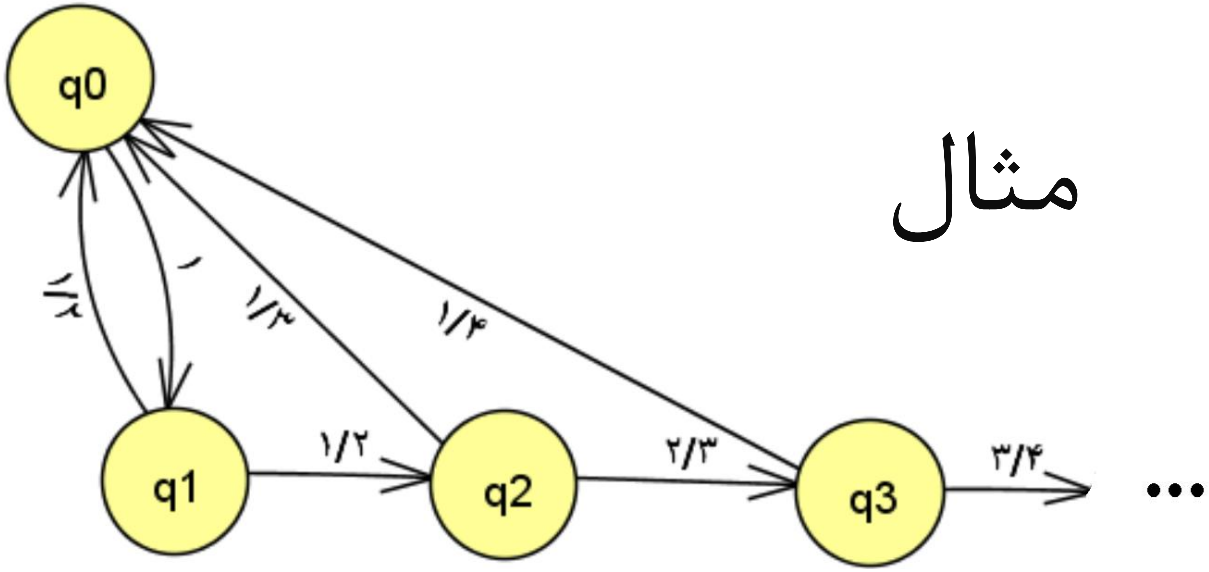
$$\pi_j \geq \pi_i P_{ij}^{n} > 0$$

حکم برقرار است.

نتایج

- بازگشتی پوچ نیز خاصیتی رده‌ای است
- زنجیره مارکوف متناهی کاهش‌ناپذیر لاجرم بازگشتی مثبت است. چرا؟
- مثال معروف بازگشتی پوچ
  - ولگشت تک بعدی متقارن. چرا؟

# مثال




$$P(N_0 = ۲|X_0 = 0) = \frac{۱}{۲}$$

$$P(N_0 = ۳|X_0 = 0) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳}$$

$$P(N_0 = ۳|X_0 = 0) = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۴}$$

$$\vdots$$

$$P(N_0 = n|X_0 = 0) = \frac{۱}{n-۱} \times \frac{۱}{n}$$

حالت 0 بازگشتی زیرا احتمال عدم برگشت برابر 0

$$P(N_0 = \infty|X_0 = 0) = \underset{n\to\infty}{\text{حد}} \frac{۱}{(n-۱) \times n} \to 0$$

حالت 0 بازگشتی تهی زیرا امید ریاضی برگشت برابر بی‌نهایت

$$E(N_0 = n|X_0 = 0) = \sum_{n=۱}^{\infty} nP(N_0 = n|X_0 = i) = \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{(n-۱)} = \infty$$

# نسبت بلندمدت زنجیره مارکوفی کاهش‌ناپذیر و بازگشتی مثبت

قضیه

- زنجیره مارکوف کاهش‌ناپذیر و بازگشتی مثبت باشد. آن‌گاه نسبت‌های بلندمدت پاسخ منحصر به فرد معادلات زیر هستند

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij}\,, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = ۱$$

در صورت بدون پاسخ بودن معادلات فوق، آن‌گاه زنجیره مارکوف یا گذراست یا بازگشتی پوچ است و تمامی $\pi_j = 0$.

# مثال- پیش‌بینی وضع هوا

شانس باران فردا

- صرفا وابسته شرایط جوی امروز

حالت‌ها

- 0: فرایند در حالت 0 در روز بارش
- ۱: فرایند در حالت ۱ در روز عدم بارش

ایجاد زنجیره مارکوف دو حالتی

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \alpha & ۱ - \alpha \\ \beta & ۱ - \beta \end{bmatrix}$$

- $\pi_0 = \alpha\pi_0 + \beta\pi_۱$
- $\pi_۱ = (۱ - \alpha)\pi_0 + (۱ - \beta)\pi_۱$
- $\pi_0 + \pi_۱ = ۱$

- $\pi_0 = \frac{\beta}{۱+\beta-\alpha}$
- $\pi_۱ = \frac{۱-\alpha}{۱+\beta-\alpha}$

# مثال- شاد و معمولی و غمگین

- احتمال‌های انتقال
  - اگر امروز شاد آنگاه احتمال شادی و معمولی و غمگینی فردا به ترتیب ۰,۵ و ۰,۴ و ۰,۱
  - اگر امروز معمولی آنگاه احتمال شادی و معمولی و غمگینی فردا به ترتیب ۰,۳ و ۰,۴ و ۰,۳
  - اگر امروز غمگین آنگاه احتمال شادی و معمولی و غمگینی فردا به ترتیب ۰,۲ و ۰,۳ و ۰,۵
- $X_n$
  - نمایشگر حال و احوال مش سکینه
  - $\{X_n, n \geq 0\}$
- حالت‌ها
  - سه حالت یا زنجیره مارکوف سه حالتی
  - شاد یا حالت 0 و معمولی یا حالت ۱ و غمگین یا حالت ۲

$$P = \begin{bmatrix} ۰.۵ & ۰.۴ & ۰.۱ \\ ۰.۳ & ۰.۴ & ۰.۳ \\ ۰.۲ & ۰.۳ & ۰.۵ \end{bmatrix}$$

- $\pi_0 = ۰.۵\pi_0 + ۰.۳\pi_۱ + ۰.۲\pi_۲$
- $\pi_۱ = ۰.۴\pi_0 + ۰.۴\pi_۱ + ۰.۳\pi_۲$
- $\pi_۲ = ۰.۱\pi_0 + ۰.۳\pi_۱ + ۰.۵\pi_۲$
- $\pi_0 + \pi_۱ + \pi_۲ = ۱$

- $\pi_0 = \frac{۲۱}{۶۲}$
- $\pi_۱ = \frac{۲۳}{۶۲}$
- $\pi_۲ = \frac{۱۸}{۶۲}$

# مثال- تحلیل طبقات اجتماعی در گذر زمان

جامعه‌شناسان: طبقهٔ اجتماعی نسل‌های بعدی چون زنجیرهٔ مارکوف است.

$$P = \text{پدر} \begin{array}{c} \text{ضعیف} \\ \text{متوسط} \\ \text{بالا} \end{array} \begin{bmatrix} ۰.۴۵ & ۰.۴۸ & ۰.۰۷ \\ ۰.۰۵ & ۰.۷ & ۰.۲۵ \\ ۰.۰۱ & ۰.۵ & ۰.۴۹ \end{bmatrix}$$

- $\pi_0 = ۰.۴۵\pi_0 + ۰.۰۵\pi_۱ + ۰.۰۱\pi_۲$
- $\pi_۱ = ۰.۴۸\pi_0 + ۰.۷\pi_۱ + ۰.۲۵\pi_۲$
- $\pi_۲ = ۰.۰۱\pi_0 + ۰.۵\pi_۱ + ۰.۴۹\pi_۲$
- $\pi_0 + \pi_۱ + \pi_۲ = ۱$

- $\pi_0 = ۰.۰۷$
- $\pi_۱ = ۰.۶۲$
- $\pi_۲ = ۰.۳۱$

# مثال- حق بیمه سالانهٔ خودرو

| حالت | مبلغ پرداخت بیمه | حالت بعدی | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | بدون ادعا | یک ادعا | دو ادعا | $\geq$ ۳ |
| ۱ | ۲۰۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲ | ۲۵۰ | ۱ | ۳ | ۴ | ۴ |
| ۳ | ۴۰ | ۲ | ۴ | ۴ | ۴ |
| ۴ | ۶۰۰ | ۳ | ۴ | ۴ | ۴ |

$$s_۲(0) = ۱$$

فرض بیمه‌شده‌ای دارای توزیع تصادفی در درخواست‌های سالانه با پارامتر $\lambda = \frac{۱}{۲}$

- $a_k$ احتمال k ادعا در طول یک سال
- ماتریس انتقال احتمال

$$a_k = e^{-\frac{۱}{۲}} \frac{\left(\frac{۱}{۲}\right)^k}{k!}, k \geq 0$$

$$a_0 = ۰.۶۰۶۵$$

$$a_۱ = ۰.۳۰۳۳$$

$$a_۲ = ۰.۰۷۵۸$$

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} a_0 & a_۱ & a_۲ & ۱ - a_0 - a_۱ - a_۲ \\ a_0 & 0 & a_۱ & ۱ - a_0 - a_۱ \\ 0 & a_0 & 0 & ۱ - a_0 \\ 0 & 0 & a_0 & ۱ - a_0 \end{bmatrix}$$

# مثال- حق بیمه سالانهٔ خودرو

$$a_0 = ۰.۶۰۶۵$$
$$a_۱ = ۰.۳۰۳۳$$
$$a_۲ = ۰.۰۷۵۸$$

فرض بیمه‌شده‌ای دارای توزیع تصادفی در درخواست‌های سالانه با پارامتر $\lambda$

- $a_k$ احتمال k ادعا در طول یک سال

$$a_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, j \geq 0$$

- ماتریس انتقال احتمال

$$P = \begin{bmatrix} ۰.۶۰۶۵ & ۰.۳۰۳۳ & ۰.۰۷۵۸ & ۰.۰۱۴۴ \\ ۰.۶۰۶۵ & 0 & ۰.۳۰۳۳ & ۰.۰۹۰۲ \\ 0 & ۰.۶۰۶۵ & 0 & ۰.۳۹۳۵ \\ 0 & 0 & ۰.۶۰۶۵ & ۰.۳۹۳۵ \end{bmatrix}$$

$$\pi_۱ = ۰.۶۰۶۵\pi_۱ + ۰.۶۰۶۵\pi_۲$$
$$\pi_۲ = ۰.۳۰۳۳\pi_۱ + ۰.۶۰۶۵\pi_۳$$
$$\pi_۳ = ۰.۰۷۵۸\pi_۱ + ۰.۳۰۳۳\pi_۲ + ۰.۶۰۶۵\pi_۴$$
$$\pi_۱ + \pi_۲ + \pi_۳ + \pi_۴ = ۱$$

$$\pi_۱ = ۰.۳۶۹۲$$
$$\pi_۲ = ۰۲۳۹۵$$
$$\pi_۳ = ۰۲۱۰۳$$
$$\pi_۴ = ۰۱۸۰۹$$

$$۲۰۰\pi_۱ + ۲۵۰\pi_۲ + ۴۰۰\pi_۳ + ۶۰۰\pi_۴ = ۳۲۶.۳۷۵$$

# رفتار حدی

زم دارای حافظهٔ تک گام

- فراموشی حالت آغاز در بلندمدت

رفتار زم در میل به بی‌نهایت

$$\pi_j = \underset{n\to\infty}{\text{حد}} P(X_n = j | X_0 = i) = \underset{n\to\infty}{\text{حد}} P_{ij}^n$$

رفتار در بی‌نهایت مستقل از $X_0 = i$ و برابر مقادیر نسبت بلندمدت

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} ۰.۸ & ۰.۲ \\ ۰.۳ & ۰.۷ \end{bmatrix} \qquad P^{۲} = \begin{bmatrix} ۰.۷۰ & ۰.۳۰ \\ ۰.۴۵ & ۰.۵۵ \end{bmatrix} \qquad P^{۷} = \begin{bmatrix} ۰.۶۰۳۱ & ۰.۳۹۶۹ \\ ۰.۵۹۵۳ & ۰.۴۰۴۷ \end{bmatrix} \qquad P^{۳۰} = \begin{bmatrix} ۰.۶۰۰۰ & ۰.۴۰۰۰ \\ ۰.۶۰۰۰ & ۰.۴۰۰۰ \end{bmatrix}$$

همگرائی ضرب ماتریسی

- برای **n**-های بزرگ، احتمال مستقل از زمان

تمام ردیف‌ها برابر

- احتمالات مستقل از وضعیت آغاز

$$\pi_0 = \frac{\beta}{۱ + \beta - \alpha} \qquad \pi_0 = ۰.۶$$

$$\pi_۱ = \frac{۱ - \alpha}{۱ + \beta - \alpha} \qquad \pi_۱ = ۰.۴$$

# احتمالات حدی

تا حال هر چه دیده‌ایم

- نسبت بلند مدت اجرا برابر با توزیع حدی
- اما همیشه برقرار نیست
  - در ادامه بررسی مواردی که برقرار است و چرائی

- مثال زنجیره مارکوف دو حالتی
  - $P_{0,1} = P_{1,0} = 1$
  - زنجیره مارکوف دمامدم در حال انتقال بین حالت‌های 0 و ۱
  - نسبت‌های اجرای بلندمدت
    - $\pi_0 = \pi_1 = \frac{1}{2}$
    - اما
    - $P_{0,0}^n = \begin{cases} 1, & n\text{ زوج} \\ 0, & n\text{ فرد} \end{cases}$
    - پس با میل به بی‌نهایت **n**، نبود مقدار حدی برای $P_{0,0}^n$

# تناوب

تناوب d حالت i

- بزرگترین مقسوم علیه تعداد تغییر حالت‌های مورد نیاز برگشت به حالت i

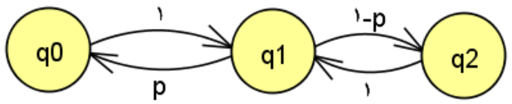
$$d = \text{ب‌م‌م}\{n: P_{ii}^{n} \neq 0\}$$

شروط متناوب بودن حالت $i$

- $P_{ii}^{n} \neq 0$ صرفا برای n-های مضرب d
- d بزرگترین عدد با این خاصیت

احتمال مثبت برگشت به i صرفا در هر d قدم زمانی

تناوب خاصیتی رده‌ای




حالت ۱ دارای دوره تناوب ۲

- همچنین حالت‌های 0 و ۲

ولگشت تصادفی تک-بعدی دارای دوره تناوب ۲

# مثال-

$P = \begin{bmatrix} 0 & ۱ \\ ۰.۵ & ۰.۵ \end{bmatrix}$ $P^{۲} = \begin{bmatrix} ۰.۵۰ & ۰.۵۰ \\ ۰.۲۵ & ۰.۷۵ \end{bmatrix}$ $P^{۳} = \begin{bmatrix} ۰.۲۵۰ & ۰.۷۵۰ \\ ۰.۳۷۵ & ۰.۶۲۵ \end{bmatrix}$

$P_{۱۱} = 0$ اما $P^{۲}_{۱۱} \neq 0$ ،$P^{۳}_{۱۱} \neq 0$

- بنابراین ب‌م‌م {۲و۳}=۱

$P_{۲۲} \neq 0$ پس حالت ۲ غیرتناوبی

- باید این‌طور باشد چرا که ۲ $\leftrightarrow$ ۱

# مثال-

$P = \begin{bmatrix} 0 & ۱ \\ ۱ & 0 \end{bmatrix}$ $P^{۲} = \begin{bmatrix} ۱ & 0 \\ 0 & ۱ \end{bmatrix}$ $P^{۳} = \begin{bmatrix} 0 & ۱ \\ ۱ & 0 \end{bmatrix}$

$P_{۱۱}^{۲n+۱} = 0$ اما $P_{۱۱}^{۲n} \neq 0$

- بنابراین ب‌م‌م {۲و۴}=۲
- پس حالت ۱ دارای دوره تناوب ۲
- ایضا حالت ۲ زیرا ۲ $\longleftrightarrow$ ۱

# ارگودیک

### ارگودیک

- حالت‌هایی دارای هر دو ویژگی «بازگشتی مثبت» و «غیرمتناوب»

### زنجیره مارکوف ارگودیک

- زم کاهش‌ناپذیر با حالت‌های ارگودیک
  - پس زم ارگودیک دارای ویژگی‌های
    - کاهش‌ناپذیر
    - غیرمتناوب
    - بازگشتی مثبت

# توزیع حدی زنجیره مارکوفی ارگودیک

قضیه

- زنجیره مارکوف ارگودیک (یا همان کاهش‌ناپذیر، غیرمتناوب، بازگشتی مثبت) دارای «$\underset{n\to\infty}{\text{حد}} P_{ij}^{n}$» است. حد مذکور مستقل از حالت آغاز است. بدیگر سخن

$$\pi_j = \underset{n\to\infty}{\text{حد}} P(X_n = j | X_0 = i) = \underset{n\to\infty}{\text{حد}} P_{ij}^{n}$$

- هم‌چنین، احتمالات حالت پایدار $\pi_j \geq 0$ پاسخ‌های منحصربفرد نامنفی دستگاه معادلات خطی هستند. به عبارت دیگر

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij}\,, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = \text{۱}$$

بنابراین در صورت پاسخ نداشتن دستگاه معادلات خطی، زنجیره مارکوفی یا گذرا یا بازگشت تهی و همهٔ $\pi_j = 0$.
استفاده از معادلات جبری آسان جهت یافتن احتمالات حالت پایدار

دقت شود که قضیه مذکور برای موارد متناوب، حالت‌های بازگشت تهی، چند رده کاربرد ندارد

# روابط جبری تیین احتمالات حدی

استفاده از احتمال کل

$$P_{kj}^{n+۱} = P(X_{n+۱} = j|X_0 = k) = \sum_{i=0}^{\infty} P(X_{n+۱} = j|X_n = i, X_0 = k)P_{ki}^{n}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij}P_{ki}^{n}$$

# روابط جبری تیین احتمالات حدی

استفاده از احتمال کل

$$P_{kj}^{n+۱} = P(X_{n+۱} = j|X_0 = k) \ = \sum_{i=0}^{\infty} P(X_{n+۱} = j|X_n = i, X_0 = k)P_{ki}^{n}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij}P_{ki}^{n}$$

اگر حد وجود داشته باشد،آن‌گاه برای **n**-های به اندازه کافی بزرگ

- $P_{kj}^{n+۱} \approx \pi_j$ و $P_{ki}^{n} \approx \pi_i$؛ پس

$$\pi_j \ = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij}$$

معادله دیگر به دلیل اصول کولمولگروف برقرار است

از لحاظ احتمالی$\Longleftarrow$ حالت‌ها تغییر می‌کنند ولی احتمالات خیر!

انتخاب توزیع آغازین

- $P(X_0 = i) = \pi_i, \forall i$

احتمال در زمان ۱

$$P(X_1 = j) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X_1 = j | X_0 = i) P(X_0 = i)$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(X_1 = j | X_0 = i) \pi_i$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} P_{ij} \pi_i = \pi_j$$

- ادامه بازگشتی با شروع از $P(X_0 = i) = \pi_i$
  - عدم تغییر توزیع احتمال $P(X_n = i) = \pi_i \forall n$

# نمایش ماتریسی

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}} P_{ij}^{n} = \begin{bmatrix} \pi_۱ & \pi_۲ & \dots & \pi_N \\ \pi_۱ & \pi_۲ & \dots & \pi_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \pi_۱ & \pi_۲ & \dots & \pi_N \end{bmatrix}$$

احتمال یکسان همه ردیف‌ها

- نشان‌دهندهٔ استقلال از حالت آغاز

توزیع احتمال برای **n** بزرگ

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}} \boldsymbol{p}(n) = \underset{n\to\infty}{\text{حد}} (P^n)^T \boldsymbol{p}(0) = (\pi_1, \dots, \pi_N)^T$$

استقلال از وضعیت آغازین $\boldsymbol{p}(0)$

# نمایش ماتریسی- بردار ویژه

توزیع حدی (حالت پایدار)

- $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_N)^T$

توزیع حدی پاسخ منحصربفرد

$$\boldsymbol{\pi} = P^T \boldsymbol{\pi}, \qquad \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{1} = 1$$

$\boldsymbol{\pi}$ بردار ویژه‌ای همراه مقدار ویژهٔ ۱ برای $P^T$

- نرمال شده جهت جمع برابر ۱

تمامی دیگر مقادیر ویژهٔ $P^T$ دارای اندازه‌ای کوچکتر از ۱

- در غیر این‌صورت،واگرائی $P^T$
- اما اطلاع از اینکه $P^T$ دارای احتمال‌های انتقال n-گامی
- بردارویژهٔ $\boldsymbol{\pi}$ همراه با بزرگترین مقدار $P^T$

بدست آوردن $\boldsymbol{\pi}$ چون بردار ویژه معمولا دارای محاسبات کارآمد

# احتمالات حدی

چرا؟

- مربوط به تناوب
- زنجیره متناوب
  - عدم احتمالات حدی
- اما همان‌طور که در قضیه بیان شد زم کاهش‌ناپذیر غیرمتناوب حتما دارای احتمالات حدی
  - احتمال حدی بودن در حالت $j$ برابر $\pi_j$
  - یعنی همان نسبت زمان ماندن زم در حالت $j$ هنگام اجرای بلندمدت
- توزیع حدی هنگام وجود
  - برابر با نسبت بلندمدت

# مثال- زنجیره مارکوف ارگودیک

$$P = \begin{bmatrix} 0 & ۰.۳ & ۰.۷ \\ ۰.۱ & ۰.۵ & ۰.۴ \\ ۰.۱ & ۰.۲ & ۰.۷ \end{bmatrix}$$

P متناظر با زم ارگودیک؟

- کاهش‌ناپذیر- تمامی حالت‌ها در ارتباط با حالت ۲
- بازگشت مثبت- کاهش‌ناپذیر و متناهی
- غیرمتناوب- حالت ۲ دارای دوره تناوب ۱

بنابراین وجود حد

$$\lim_{n\to\infty} (P^n)^T \boldsymbol{p}(0) = (\pi_۱, \pi_۲, \pi_۳)^T$$

مستقل از $\boldsymbol{p}(0)$

# مثال- زنجیره مارکوف ارگودیک- ادامه

نحوهٔ محاسبهٔ $\pi_j$

- حل دستگاه معادلات خطی $\pi_j = \sum_{i=0}^{۳} \pi_i P_{ij}$ و $\sum_{j=0}^{۳} \pi_j = ۱$

$$\begin{bmatrix} \pi_۱ \\ \pi_۲ \\ \pi_۳ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ۰.۳ & ۰.۷ \\ ۰.۱ & ۰.۵ & ۰.۴ \\ ۰.۱ & ۰.۲ & ۰.۷ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_۱ \\ \pi_۲ \\ \pi_۳ \end{bmatrix}$$

سه متغیرهٔ چهار معادله

- بعضی از معادلات محتملا وابستهٔ خطی؟
  - در واقع جمع سه معادلهٔ اول برابر معادله آخر
- چون جمع ردیف‌های P برابر ۱
  - توجه در اینجا در ماتریس $P^T$ قرار دادیم

$$\begin{bmatrix} \pi_۱ \\ \pi_۲ \\ \pi_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰.۰۹۰۹ \\ ۰.۲۹۸۷ \\ ۰.۶۱۰۴ \end{bmatrix}$$

# منابع

[پینسکی]

[راس]

[زانلا]

[متئوس]

[ریبیرو]